1°/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer $F'(x)$.

2°/ Etudier le sens de variations de F.

3°/ a) Montrer que $\forall t \geq 0,\ \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$.

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^x (t+\frac{1}{4}).e^{-t}\,dt$

c) En déduire que $\forall x \geq 0$, on a : $F(x) \leq \frac{5}{4}$.

Exercice 16 :

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

1°/ Prouver que f est définie sur $\mathbf{R}$.

2°/ a) Prouver que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

b) Calculer pour chaque $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)$.

3°/ En déduire $f(x)$.

4°/ Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

Exercice 17 :

1°/ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$\forall x \in \mathbf{R},\ \left| e^x - 1 \right| \leq |x|\, e^{|x|}$.

2°/ Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{tg} x} \frac{dt}{t^2+1}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire $\varphi(x)$.

3°/ Soit $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{tx}}{t^2+1} dt$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer F(0).

b) Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ \left| F(x) - \frac{\pi}{2} \right| \leq |x|\ e\ \ln 2$.

c) En déduire que F est continue en 0.